OPCIÓN A

A.1.- Sea **a** un número real y el sistema lineal $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Calcule el determinante de la matriz de los coeficientes y determine para que valores de **a** el sistema anterior es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado

b) (1punto) Resuelva el sistema anterior en el caso **a = 0**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3+1+1-a-a-a = a^3-3a+2 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow a^3-3a+2=0 \Rightarrow Por\ Rufinni$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow a^3-3a+2 = (a-1)\cdot(a^2+a-2) \Rightarrow (a-1)\cdot(a^2+a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a^2+a-2=0 \end{cases}$$

$$a^2+a-2=0 \Rightarrow \Delta = 1^2-4\cdot 1\cdot(-2) = 1+8 = 9 > 0 \Rightarrow a = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=1 \\ a^2+a-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ a=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \end{cases} \end{cases}$$

$(Para\ todo)\forall\alpha \in \Re - \{-2\ ,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ incognitas \Rightarrow Compat.Deter\min ado$

$Si\ a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=6 \Rightarrow$$

$$z=\frac{6}{0} \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=0 \Rightarrow z=\frac{0}{0} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)Si\ a=0 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2z=1 \Rightarrow z=\frac{1}{2} \Rightarrow -y+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow Solución\quad (x\ ,y\ ,z) = \left(-\frac{1}{2}\ ,\frac{1}{2}\ ,\frac{1}{2}\right)$$

A.2.- (2'5 puntos) Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}\,dx$

Las soluciones de la ecuación que genera el denominador son $\pm 1\,,2\,,3\,,4\,,6\,,12$

Después de analizar la ecuación, por Ruffini con **1 , -1 , 2** tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -2 & 12 \\ -\dot{2} & & -2 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow x^3-2x^2-2x+12=(x+2)\cdot(x^2-4x+6) \Rightarrow Si\ x^2-4x+6=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 6=16-24=-8<0 \Rightarrow Sin\ solución\ real$$

$$x^3-2x^2-2x+12=(x+2)\cdot(x^2-4x+6) \Rightarrow$$

$$\frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}=\frac{x^2+11x}{(x+2)\cdot(x^2-4x+6)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+6}=\frac{A\cdot(x^2-4x+6)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)\cdot(x^2-4x+6)} \Rightarrow$$

$$A\cdot(x^2-4x+6)+(Bx+C)(x+2)=x^2+11x \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{r} x=0 \Rightarrow A\cdot(0^2-4\cdot 0+6)+(B\cdot 0+C)(0+2)=0^2+11\cdot 0 \\ x=1 \Rightarrow A\cdot(1^2-4\cdot 1+6)+(B\cdot 1+C)(1+2)=1^2+11\cdot 1 \\ x=-2 \Rightarrow A\cdot\left[(-2)^2-4\cdot(-2)+6\right]+-[B\cdot(-2)+C](-2+2)=(-2)^2+11\cdot(-2) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} A\cdot 6+C\cdot 2=0 \\ A\cdot 3+(B+C)\cdot 3=12 \\ A\cdot 18=-18 \end{array}\right. \Rightarrow 18A=-18 \Rightarrow A=-1 \Rightarrow 6\cdot(-1)+2C=0 \Rightarrow 2C=6 \Rightarrow C=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow$$

$$6\cdot(-1)+3\cdot(B+3)=12 \Rightarrow 3\cdot(B+3)=18 \Rightarrow 3B+tg9=18 \Rightarrow 3B=6 \Rightarrow B=\frac{6}{3}=2$$

$$\frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}=-\frac{1}{x+2}+\frac{2x+3}{x^2-4x+6}$$

$$I=\int\frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}dx=-\int\frac{1}{x+2}dx+\int\frac{2x+3}{x^2-4x+6}dx=-\int\frac{dt}{t}+\int\frac{2x-4+4+3}{x^2-4x+6}dx$$

$$x+2=t \Rightarrow dx=dt$$

$$I=-ln\ t+\int\frac{2x-4}{x^2-4x+6}dx+\int\frac{7}{x^2-4x+6}dx=-ln\ t+\int\frac{du}{4}+\int\frac{7}{(x-2)^2-4+6}dx$$

$$x^2-4x+6=u \Rightarrow (2x-4)\,dx=du \qquad\qquad x-2=v \Rightarrow dx=dv$$

$$I=-ln\,(x+2)+ln\ u+\int\frac{7}{v^2+2}dv=-ln\,(x+2)+ln\,(x^2-4x+6)+\int\frac{7}{2\left[\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}dv=$$

$$I=ln\left(\frac{x^2-4x+6}{x+2}\right)+\frac{7}{2}\int\frac{dv}{\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2+1}=ln\left(\frac{x^2-4x+6}{x+2}\right)+\frac{7\sqrt{2}}{2}\int\frac{dr}{r^2+1}=ln\left(\frac{x^2-4x+6}{x+2}\right)+\frac{7\sqrt{2}}{2}\cdot arc\ tg\ r$$

$$\frac{v}{\sqrt{2}}=r \Rightarrow dv=\sqrt{2}\ dr$$

$$I=ln\left(\frac{x^2-4x+6}{x+2}\right)+\frac{7\sqrt{2}}{2}\cdot arc\ tg\ \frac{v}{\sqrt{2}}=ln\left(\frac{x^2-4x+6}{x+2}\right)+\frac{7\sqrt{2}}{2}\cdot arc\ tg\ \frac{x-2}{\sqrt{2}}+K$$

A.3.- a) (0'75 puntos) Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo

b) (1 punto) Hallar el valor de **k** para que: $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} + kx}{x - sen(x)} = 2$

c) (0'75 puntos) Sea $f(\Re) \to \Re$ una función real de variable real, continua y derivable en la recta real. Supongamos que $f(0) \neq 0 \ y \ f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo número real **x**, **y**.
Demostrar que $f(0) = 1 \ ; \ f(x) \neq 0 \ ; \ f(x) > 0 \ y \ f'(x) = f'(0)f(x)$ para todo número real **x**

a)

$$\begin{cases} a + b = 12 \Rightarrow b = 12 - a \\ P = ab^2 \end{cases} \Rightarrow P = a(12-a)^2 \Rightarrow P' = \frac{dP}{da} = (12-a)^2 + 2\cdot(12-a)\cdot(-1)\cdot a$$

$$P' = \frac{dP}{da} = (12-a)^2 - 2a(12-a) = [(12-a) - 2a](12-a) = (12-3a)(12-a) = 3\cdot(4-a)(12-a)$$

$$P' = 0 \Rightarrow 3\cdot(4-a)(12-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 - a = 0 \Rightarrow a = 4 \\ 12 - a = 0 \Rightarrow a = 12 \end{cases} \Rightarrow P'' = \frac{d^2P}{da^2} = 3\cdot[(-1)\cdot(12-a) + (-1)\cdot(4-a)]$$

$$P'' = 3\cdot[-12 + a - 4 + a] = 3\cdot(2a - 16) = 6\cdot(a-8) \Rightarrow \begin{cases} P''(4) = 6\cdot(4-8) = -24 < 0 \Rightarrow Máximo \\ P''(12) = 6\cdot(12-8) = 24 > 0 \Rightarrow Mínimo \end{cases} \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 12 - 4 = 8 \end{cases}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - sen(x)} = \frac{e^0 - e^{-0} + k\cdot 0}{0 - sen(0)} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (-1)e^{-x} + k}{1 - cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} + k}{1 - cos(x)} =$$

$$= \frac{e^0 + e^{-0} + k}{1 - cos(0)} = \frac{1 + 1 + k}{1 - 1} = \frac{2 + k}{0} \Rightarrow (Solo\ puede\ ser\ que\ 2 + k = 0 \Rightarrow k = -2) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - cos(x)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{-(-1)sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen(x)} = \frac{e^0 - e^{-0}}{sen(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{cos(x)} = \frac{e^0 + e^{-0}}{cos(0)} = \frac{1+1}{1} = 2$$

c)
Hipótesis f(0) ≠ 0 y f(x+y) = f(x).f(y)

f(0) = f(0+0) = f(0).f(0) = $[f(0)]^2$, de donde $[f(0)]^2$ – f(0) = 0 = f(0)[f(0) - 1] = 0. Como me dicen que f(0) ≠ 0, la única posibilidad es **f(0) - 1 = 0**, de donde **f(0) = 1**

Como f(0) = 1 = f(x+(-x)) = f(x).f(-x) ≠ 0, por *tanto* f(x) = 1/f(-x) , **luego f(x) y f(-x) tienen el mismo signo**

f(x+x) = f(x).f(x) = $[f(x)]^2$ = f(2x) > 0, y también f(-2x) > 0 al tener el mismo signo f(x) y f(-x), por tanto **f(x) > 0**, luego f(x) es > 0 multiplique a "x" por cualquier número positivo, negativo o cero, porque f(0) = 1

Continuación del Problema A.3
c) Continuación

f'(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot f(h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot(f(h)-1))}{h} = f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(f(h)-1))}{h}$

Como f(x) $\neq$ 0, y existe f'(x), tenemos que "f(h) – 1 = 0", para que exista el límite, pues existe f'(x), y poder aplicarle la regla de L'Hôpital (L'H).

f'(x) = $f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(f(h)-1))}{h} = \left(f(x)\cdot\frac{0}{0}=\frac{0}{0}\text{. Le aplicamos L'H}\right) = f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)}{1} = f(x)\cdot f'(0)$, es decir

f'(x) = f'(0)·f(x)

Problema resuelto por D. Germán Jesús Rubio Luna

A.4.- a) (1 punto) Halla el plano que contiene a la recta **v** de ecuación paramétrica:
$v: \quad (2,1,3)+t\,(2,1,0)$ y es perpendicular al plano de ecuación **x + z = 2**

b) (1'5 puntos) Probar que los vectores $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ forman una base en $\mathbf{R^3}$ y dar las coordenadas del vector **(1 , - 2 , 0)** en la base anterior

a) El plano esta formado por el vector de la recta **v**, por el vector director del plano π que es perpendicular a este y por el vector formado por un punto **V** de la recta (el indicado en la ecuación de la recta) y el punto **G** generador del plano. Los tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) y por lo tanto, al ser uno de los vectores combinación lineal de los otros dos, el determinante de la matriz formado por ellos es nulo y la ecuación del plano β buscado

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_v} = (2,1,0) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1,0,1) \\ \overrightarrow{VG} = (x,y,z)-(2,1,3) = (x-2,y-1,z-3) \end{cases} \Rightarrow \beta \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2\cdot(y-1)+(z-3)-(x-2)=0 \Rightarrow \beta \equiv -x+2+2y-2+z-3=0 \Rightarrow \beta \equiv x-2y-z+3=0$$

b) Los tres vectores, para formar base, tienen que ser independientes lo que significa que no puede haber ninguno que sea combinación lineal de los otros, por ello el determinante de la matriz que forman **no puede ser nulo**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \textit{Son linealmente independientes} \Rightarrow \textit{Forman base en } \Re^3$$

$b)$

$$(1,-2,0) = a\,(1,1,1)+b\,(1,1,0)+c\,(1,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 1 = a+b+c \\ -2 = a+b \\ 0 = a \end{cases} \Rightarrow a=0 \Rightarrow -2=0+b \Rightarrow b=-2$$

$$1 = 0-2+c \Rightarrow c=3 \Rightarrow \textit{Coordenadas del vector } \vec{v} = (0,-2,3) \textit{ en la base en } \Re^3$$

OPCIÓN B

B1.- a) (1´5 puntos) Compruebe que la matriz **M** es inversible y calcule su inversa

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Encuentre las matrices A y B que cumplen las siguientes ecuaciones

$$8A-5B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix} \quad , \quad 2A-B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$det(M)=|M|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2+4+1-2=5\neq 0 \Rightarrow Existe\ \exists M^{-1} \Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{|M|}\cdot\left(adj\ M^{t}\right)$$

$$M^{t}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow adj\ M^{t}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -5 & 3 & 1\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -5 & 3 & 1\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ -1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$b)$

$$\begin{cases} 8A-5B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix} \\ -10A+5B=(-5)\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 20 & 0\\ -10 & 5 & -15\\ 0 & -5 & 5\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow$$

$$8A-5B-10A+5B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5 & 20 & 0\\ -10 & 5 & -15\\ 0 & -5 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow -2A=\begin{pmatrix}-2 & 22 & 0\\ -12 & 6 & -12\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 22 & 0\\ -12 & 6 & -12\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -11 & 0\\ 6 & -3 & 6\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow B=2A-\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & -22 & 0\\ 12 & -6 & 12\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -18 & 0\\ 10 & -5 & 9\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

B.2.- a) (1'5 puntos) Calcule la siguiente integral indefinida: $\int cos\,(ln\ x)\,dx$.
(Ayuda: realice un cambio de variable adecuado para esta integral)

b) (1 punto) Calcule el limite siguiente $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}\right) ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)$

$a)$

$$\int cos\,(ln\ x)\,dx=\int cos\,t\ e^t dt=e^t sen\ t-\int sen\ t\ e^t dt$$

$$ln\ x=t\Rightarrow\begin{cases}x=e^t\\ \frac{dx}{x}=dt\end{cases}\Rightarrow dx=e^t dt \qquad \begin{cases}u=e^t\ \Rightarrow du=e^t dt\\ cos\,t\ dt=dv\Rightarrow v=\int cos\,t\ dt=sen\ t\end{cases}$$

$$\int cos\,t\ e^t dt=e^t sen\ t-\int sen\ t\ e^t dt=e^t sen\ t-\left[e^t(-cos\ t)-\int(-cos\,t)\,e^t dt\ \right]$$

$$\begin{cases}u=e^t\ \Rightarrow du=e^t dt\\ sen\ t\ dt=dv\Rightarrow v=\int sen\ t\ dt=-cos\ t\end{cases}$$

$$\int cos\,t\ e^t dt=e^t sen\ t+e^t\ cos\ t-\int cos\,t\ e^t dt\ \ \Rightarrow Llamando\ I=\int cos\,t\ e^t dt=$$

$$I=e^t sen\ t+e^t\ cos\ t-I\Rightarrow 2I=e^t sen\ t+e^t\ cos\ t\Rightarrow I=\frac{e^t}{2}(sen\ t+cos\ t)$$

$$\int cos\,(ln\ x)\,dx=\frac{e^t}{2}\left[sen\,(ln\ x)+cos\,(ln\ x)\right]+K$$

$b)$

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{1}{0+0}=\frac{1}{0}=\infty\\ \lim_{x\to+\infty}ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)=ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x+5}{x-1}\right)=\frac{\infty}{\infty}=ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}\right)=ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)=ln\frac{1+\frac{5}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=ln\frac{1+0}{1-0}=ln\ 1=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}\right)ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)=\infty\cdot 0=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)}{\frac{1}{\left(\frac{x^2}{x+3}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)}{\frac{x+3}{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\left(\frac{x+5}{x-1}\right)}\cdot\frac{x-1-(x+5)}{(x-1)^2}}{\frac{x^2-2x(x+3)}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-1}{x+5}\cdot\frac{(-6)}{(x-1)^2}}{\frac{x-2(x+3)}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(-6)}{(x-1)(x+5)}}{\frac{-x-6}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-6)x^3}{-(x-6)(x-1)(x+5)}=$$

Continuación del Problema B.2

b)Continuación

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^3}{(x^2-7x+6)(x+5)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^3}{x^3-2x^2-29x+30} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-2\frac{x^2}{x^3}-29\frac{x}{x^3}+\frac{30}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{1-\frac{2}{x}-\frac{29}{x^2}+\frac{30}{x^3}} = \frac{6}{1-\frac{2}{\infty}-\frac{29}{\infty}+\frac{30}{\infty}} = \frac{6}{1-0-0+0} = 6$$

B.3.- Sea **f** la función de variable real definida mediante la expresión $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

a) (0’5 puntos) Determinar el dominio de continuidad, simetrías, corte con los ejes y asíntotas de la función **f**
b) (1 punto) Calcule, si existe, los extremos relativos y absolutos, e intervalos de crecimiento y decrecimiento de **f**
c) (0’5 puntos) Calcule, si existe, los puntos de inflexión de **f**
d) (0’5 puntos) Dibuje la gráfica de **f**

a)

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow \text{Sin solución en } \Re \Rightarrow Dom(f) = \forall x \in \Re$$

$$f(-x) = \frac{2\cdot(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f(x) \Rightarrow \text{Simétrica respecto al origen}$$

$$\text{Corte con} \begin{cases} OY \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(x)=\frac{2\cdot 0}{0^2+1}=\frac{0}{1}=0 \\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow (0\ ,0)$$

No hay asíntotas verticales

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{2}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

Existe asíntota horizontal $y=0$ *cuando* $x\to\infty$

$$y = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{2}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

Existe asíntota horizontal $y=0$ *cuando* $x\to-\infty$

Continuación del Problema B.3

a)Continuación

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^3+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}}=\frac{\frac{2}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$$

No existe asíntota oblícua cuando $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^3+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{-x^3-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^3+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\frac{\frac{2}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1+0}=\frac{0}{1}=0\Rightarrow \textit{No existe asíntota oblícua cuando } x\to-\infty$$

b)

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=2\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\textit{Crecimiento}\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow 2\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ 1-x>0\Rightarrow -x>-1\Rightarrow x<1\Rightarrow\forall x\in\Re/x<1\\ 1+x>0\Rightarrow x>-1\Rightarrow\forall x\in\Re/x>-1\\ (x^2+1)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$	**-1**	**1** ∞
2 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x < 1	**(+)**	**(+)**	**(-)**
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
$(x^2+1)^2>0$	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**

Crecimiento $\forall x\in\Re/-1<x<1$

Decrecimiento $\forall x\in\Re/(x<-1)\cup(x>1)$

Máximo relativo en x = 1 $f(1)=\frac{2\cdot 1}{1^2+1}=\frac{2}{2}=1$ (de crecimiento pasa a decrecimiento)

Máximo relativo en x = -1 $f(-1)=\frac{2\cdot(-1)}{(-1)^2+1}=\frac{-2}{2}=-1$ (de decrecimiento pasa a crecimiento)

Como $\begin{cases}\lim_{x\to\infty} f(x)=0\\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1>0\Rightarrow \textit{Máximo relativo y absoluto}\\ -1<0\Rightarrow \textit{Mínimo relativo y absoluto}\end{cases}$

Continuación del problema B.3 de la opción B

c)

$$f''(x)=2\frac{(-2)x\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2+1\right)\cdot 2x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=-4\frac{x\left(x^2+1\right)+2x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=-4\frac{x^3+x+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f''(x)=4\frac{x^3-3x}{\left(x^2+1\right)^3}=4\frac{\left(x^2-3\right)x}{\left(x^2+1\right)^3}\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow 4\left(x^2-3\right)x=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x^2-3=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3}\end{cases}\end{cases}$$

$$f'''(x)=4\frac{\left(3x^2-3\right)\left(x^2+1\right)^3-3\left(x^2+1\right)^2 2x\left(x^3-3x\right)}{\left(x^2+1\right)^6}=4\frac{\left(3x^2-3\right)\left(x^2+1\right)-6x\left(x^3-3x\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$f'''(x)=4\frac{3x^4+3x^2-3x^2-3-6x^4+18x^2}{\left(x^2+1\right)^4}=4\frac{-3x^4+18x^2-3}{\left(x^2+1\right)^4}\Rightarrow$$

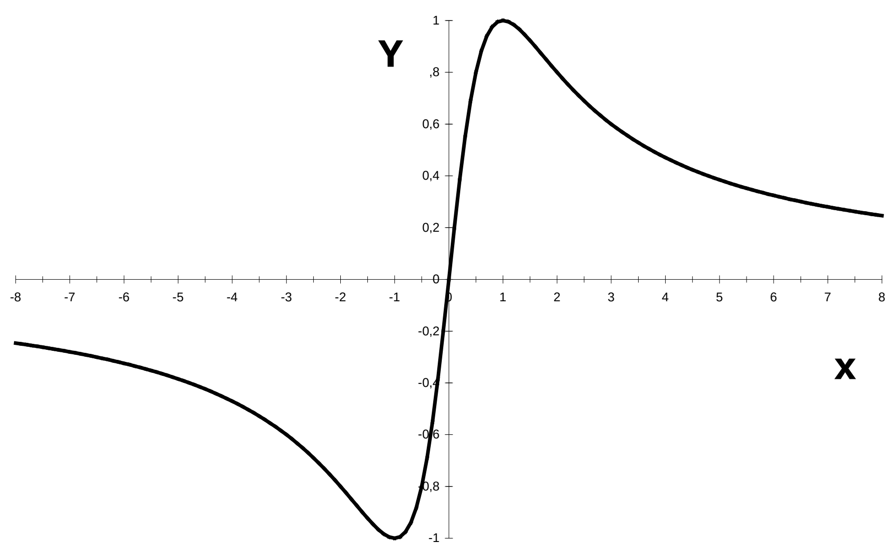
$$\begin{cases} f'''(0)=4\frac{-3\cdot 0^4+18\cdot 0^2-3}{\left(0^2+1\right)^4}=4\frac{(-3)}{1}=-12\neq 0\Rightarrow Punto\ de\ inflexión \\ f'''\left(\sqrt{3}\right)=4\frac{-3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^4+18\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2-3}{\left[\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right]^4}=4\frac{-3\cdot 3^2+18\cdot 3^2-3}{(3+1)^4}=\frac{132}{256}=\frac{33}{64}\neq 0\Rightarrow Punto\ de\ inflexión \\ f'''\left(-\sqrt{3}\right)=4\frac{-3\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^4+18\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2-3}{\left[\left(-\sqrt{3}\right)^2+1\right]^4}=4\frac{-3\cdot 3^2+18\cdot 3^2-3}{(3+1)^4}=\frac{132}{256}=\frac{33}{64}\neq 0\Rightarrow Punto\ inflexión\end{cases}$$

$$Punto\ de\ inflexión\Rightarrow(0\ ,0)$$

$$x=\sqrt{3}\Rightarrow f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow Punto\ de\ inflexión\Rightarrow\left(\sqrt{3}\ ,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x=-\sqrt{3}\Rightarrow f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{2\left(-\sqrt{3}\right)}{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1}=-\frac{2\sqrt{3}}{3+1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow Punto\ de\ inflexión\Rightarrow\left(\sqrt{3}\ ,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

d)



B.4.- Sea el haz de planos de ecuación: $(1+\lambda)x - y - \lambda z = 0$ con parámetro real λ

a) (0'5 puntos) Hallar los planos del haz que pasan por el punto **P = (1 , 1 , 1)**

b) (1 punto) Hallar los planos del haz cuya distancia al punto **Q = (3 , -2 , 1)** es $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

c) (1 punto) Hallar los planos del haz que cumplen, que el ángulo que forman con el eje **OY** tiene por seno $\frac{\sqrt{6}}{6}$

a) Solo tendremos que sustituir las coordenadas del punto **P** en la ecuación del haz de planos para hallar λ y con ellos conocer el plano π pedido

$$(1+\lambda)\cdot 1 - 1 - \lambda \cdot 1 = 0 \Rightarrow 1+\lambda-1-\lambda = 0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$Todo\ valor\ de\ \lambda \in \Re\ hace\ que\ todo\ los\ planos\ del\ haz\ de\ planos\ contengan\ al\ punto\ P$$

b)

$$\pm\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{(1+\lambda)3-(-2)-\lambda\cdot 1}{\sqrt{(1+\lambda)^2+(-1)^2+(-\lambda)^2}} \Rightarrow \pm\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3+3\lambda+2-\lambda}{\sqrt{1+2\lambda+\lambda^2+1+\lambda^2}} \Rightarrow \pm\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{5+2\lambda}{\sqrt{2+2\lambda+2\lambda^2}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{5+2\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda+\lambda^2}} \Rightarrow 3 = \frac{5+2\lambda}{\sqrt{1+\lambda+\lambda^2}} \Rightarrow 3\cdot\sqrt{1+\lambda+\lambda^2} = 5+2\lambda \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{5+2\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda+\lambda^2}} \Rightarrow -3 = \frac{5+2\lambda}{\sqrt{1+\lambda+\lambda^2}} \Rightarrow (-3)\cdot\sqrt{1+\lambda+\lambda^2} = 5+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9(1+\lambda+\lambda^2) = (5+2\lambda)^2 \\ 9(1+\lambda+\lambda^2) = (5+2\lambda)^2 \end{cases}$$

$$9+9\lambda+9\lambda^2 = 25+20\lambda+4\lambda^2 \Rightarrow 5\lambda^2-11\lambda-16=0 \Rightarrow \Delta = (-11)^2-4\cdot 5\cdot(-16) = 121+320 = 441 > 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{11\pm\sqrt{441}}{2\cdot 5} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{11+21}{10} = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \\ \lambda = \frac{11-21}{2\cdot 5} = \frac{-10}{10} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(1+\frac{16}{5}\right)x - y - \frac{16}{5}\cdot z = 0 \Rightarrow \frac{21}{5}x - y - \frac{16}{5}\cdot z = 0 \\ [1+(-1)]x - y - (-1)\cdot z = 0 \Rightarrow 0x - y + \cdot z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv 21x - 5y - 16z = 0 \\ \pi_1 \equiv y - z = 0 \end{cases}$$

Continuación del problema B.4

c)

$$\text{Ecuación del eje } OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\mu \Rightarrow \overrightarrow{v_{OY}}=(0\ ,1\ ,0) \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}=(1+\lambda\ ,-1\ ,-\lambda) \Rightarrow \\ z=0 \end{cases}$$

$$sen\ \alpha=\frac{\left|\overrightarrow{v_{OY}}\cdot\overrightarrow{v_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{v_{OY}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_\pi}\right|} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\left|(0\ ,1\ ,0)\cdot(1+\lambda\ ,-1\ ,-\lambda)\right|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{(1+\lambda)^2+(-1)^2+(-\lambda)^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{|-1|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+2\lambda+\lambda^2+1+\lambda^2}}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\lambda+\lambda^2}} \Rightarrow \sqrt{12}\cdot\sqrt{1+\lambda+\lambda^2}=6 \Rightarrow 12\left(1+\lambda+\lambda^2\right)=36 \Rightarrow 1+\lambda+\lambda^2=3 \Rightarrow -2+\lambda+\lambda^2=0$$

$$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9>0 \Rightarrow \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{-1+3}{2}=1 \\ \lambda=\frac{-1-3}{2}=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+1)x-y-1\cdot z=0 \\ (1-2)x-y-(-2)\cdot z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Planos pedidos} \Rightarrow \begin{cases} \pi_3 \equiv 2x-y-z=0 \\ -x-y+2z=0 \Rightarrow \pi_4 \equiv x+y-2z=0 \end{cases}$$